Azərbaycan Ali Texniki Məktəblərinin Xəbərləri
ISSN 1609-1620
Cild 22, № 1 (2020),
UOT 550.38

Məsələnin ümumi həllinin qurulması

İnformatika və avtomatika

Musayev X.İ., Hüseynov F.S.
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
E-mail: xasaymusayev@yandex.ru

Əvvəlki bir neçə elmi məqalələrdə örtüyün müxtəlif formalarının hesabatını momentsiz nəzəriyyə üsulu ilə həll etmişik. Bu məqalənidə örtüyün hesabatını momentsiz nəzəriyyə üsulu ilə həll edəcəyik. Məsələnin həllini qurarkən sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla, örtüyün konstruksiyasının funksiyasını seçmişik. Bir aşırımlı tir götürüb onun bir tərəfini uyğun olaraq şarnirlə dayağa bərkidirik, həmin örtüyün digər tərəfini isə dayağa sərt bağlayırıq. Məsələnin bir qədər dəqiq həllini almaqdan ötəri, bir deyil, tirin bir neçə konstruksiyasının funksiyasını nəzərdən keçirmək məqsədə uyğundur.

Açar sözlər: konstruksiyalar, örtüklər, yerdəyişmələr, gərginliklər, tənliklər, sərhəd şərtləri.

Seçdiyimiz funksiyanı F – qəbul edirik. Onda tirin fundamental funksiyası $X(\alpha)$ olacaqdır. Belə olduğu halda $F(\alpha,\theta)$-ixtiyari funksiyasını iki funksiya vasitəsi ilə göstəririk:

$$F(\alpha,\theta)=X(\alpha)Y(\theta) \tag{1}$$

Yuxarıdakı funksiya sərhəd şərtləri əsasında seçilən funksiyadır və *n*-ə görə seçilir (təyin olunur). Belə olduğu halda yerdəyişmələrin və qüvvə komponentlərinin qiyməti aşağıdakı kimi ifadə olunacaqdır:

$$\begin{gathered}
w=\sum X_n(\alpha)Y_n^{\bullet\bullet\bullet\bullet}(\theta),\\
v=\sum X_n(\alpha)Y_n^{\bullet\bullet\bullet}(\theta),\\
u=-\sum X_n'(\alpha)Y_n^{\bullet\bullet}(\theta),\\
N_1=-\frac{Eh}{R}\sum X_n''(\alpha)Y_n^{\bullet\bullet}(\theta),\\
s=\frac{Eh}{R}\sum X_n'''(\alpha)Y_n^{\bullet}(\theta), \qquad (2)\\
N_2=-\frac{Eh}{R}\left\{\sum X_n^{IV}(\alpha)Y_n(\theta)\right\}+\frac{h^2}{12R^2}\sum\left[X_n(\alpha)Y_n^{VI}(\theta)+X_n(\alpha)Y_n^{IV}(\theta)\right],\\
M_2=-\frac{D}{R^2}\sum\left[X_n(\alpha)Y_n^{VI}(\theta)+X_n(\alpha)Y_n^{VI}(\theta)\right],
\end{gathered}$$

$$Q_2 = \frac{D}{R^2}\sum\left[X_n(\alpha)Y_n^{V}(\theta) + X_n(\alpha)Y_n^{VII}(\theta)\right],$$

harda nöqtələr (θ)-ya görə törəmələrdir, ştrixlər isə (α)-ya görə törəmələrdir. $X(\alpha)$-nın qiyməti cədvəldən götürülür, $Y(\theta)$-nın qiyməti aşağıdakı tənlikdən tapılır:

$$\left(\frac{\partial^8}{\partial\theta^8} + 2\frac{\partial^6}{\partial\theta^6} + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right)F + \frac{12R^2}{h^2}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4} = 0\,, \tag{3}$$

və ya

$$\Omega\Omega F + \frac{12R^2}{h^2}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4} = 0\,, \tag{4}$$

harada $\Omega = \frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ - V.Z.Vlasovun operatorudur.

Əgər (2) tənliyinin qiymətini (3) tənliyində yerinə yazsaq və riyazi çevrilmələr aparsaq və *F*-in qiymətini (3) tənliyində nəzərə alsaq, onda (3) tənliyinin həlli üçün heç bir əhəmiyyət kəsb etməz, ona görə ki, aşağıdakı tənliyin sağ tərəfi sıfra bərabər deyil, yəni

$$\sum\left[\overset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{Y}{}_n^{\bullet\bullet\bullet\bullet}(\theta) + 2\overset{\bullet\bullet\bullet}{Y}{}_n^{\bullet\bullet\bullet}(\theta) + \overset{\bullet\bullet}{Y}{}_n^{\bullet\bullet}(\theta) + \frac{\lambda^4}{k}Y(\theta)\right]X_n(\alpha) \neq 0\,, \tag{5}$$

harada $k = \frac{h^2}{12R^2}$. Tənlikdəki $X_n(\alpha)$ funksiyasını $Y_n(\theta)$ funksiyası ilə əlaqələndirsək onda sonsuz sayda ixtiyari sabit əmsallı diferensial tənliklər alarıq:

$$\overset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{Y}{}_n^{\bullet\bullet\bullet\bullet}(\theta) + 2\overset{\bullet\bullet\bullet}{Y}{}_n^{\bullet\bullet\bullet}(\theta) + \overset{\bullet\bullet}{Y}{}_n^{\bullet\bullet}(\theta) = 0\,, \tag{6}$$

harada $n = 1, 2, 3, \ldots$. (6) tənliyindəki ifadədən, (1) tənliyinin həllini, aşağıdakı tənlik şəklində axtarırıq:

$$Y_n = Ce^{k\theta} \tag{7}$$

Xarakterik tənlik isə aşağıdakı kimidir:

$$\begin{gathered} k^8 + 2k^6 + k^4 + \frac{\lambda^4}{k} = 0, \\ k^4\left(k^2 + 1\right)^2 + \frac{\lambda^4}{k} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

(8) tənliyi 8-ci tərtibdən olan cəbri tənlikdir. Bu tənliyi aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\begin{gathered} k_{1,2,3,4} = \pm\alpha_1 \pm i\beta_1, \\ k_{5,6,7,8} = \pm\alpha_2 \pm i\beta_2, \end{gathered} \tag{9}$$

harada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ və β_2 -in qiymətləri $\frac{\lambda^4}{k}$ ifadəsindəndən asılıdır, $k_{1,2,3,4}$ və $k_{5,6,7,8}$ - cəbri tənliyin kökləridir.

Bircinsli tənliyin ümumi həllini yazaq:

$$Y = C_1 e^{k_1\theta} + C_2 e^{k_2\theta} + C_3 e^{k_3\theta} + ... + C_8 e^{k_8\theta} \qquad (10)$$

Yuxarıdakı tənliyin köklərinə uyğun olaraq, məsələnin həllini iki funksiya şəklində axdaracağıq. Həmin funksiyalar örtüyün sağ və sol tərəfinə təsir edəcəkdir. Əgər örtüyün tərəflərinin $\theta = +\theta_0$ olmasını nəzərə alsaq, onda bu tənliyin köklərini *k*-olması və 4-ə bərabər olması, eləcədə müsbət olmasını nəzərə alacağıq:

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \alpha_1 \pm i\beta_1, \\ k_{3,4} &= \alpha_2 \pm i\beta_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

Belə olduğu halda (10) tənliyinin həllinə uyğun gələn hissəsi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$Y_n(\theta) = e^{\alpha_1\theta}(C_1 \cos\beta_1\theta + C_2 \sin\beta_1\theta) + e^{\alpha_2\theta}(C_3 \cos\beta_2\theta + C_4 \sin\beta_2\theta) \qquad (12)$$

(12) tənliyinin ixtiyari sabitlərinin sağ tərəfinin birinci hissəsini $e^{-\alpha_1\theta_0}$ -a, ikinci hissəsini $e^{-\alpha_2\theta_2}$ -ə vursaq və funksiyanın θ-dan asılılığını $(\theta_0 - \theta)$ ilə əvəz etsək, onda $\omega = \theta_0 - \theta$ olacaqdır. Belə olduğda (12) tənliyinin həllini aşağıdakı şəkildə axtaracağıq:

$$Y_n(\theta) = e^{\alpha_1\omega}(C_1 \cos\beta_1\omega + D_1 \sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_1\omega}(C_2 \cos\beta_2\omega + D_2 \sin\beta_2\omega) \qquad (13)$$

Yuxarıdakı riyazi çevrilmələri nəzərə alsaq, onda tələb olunan tənliyin ümumi həlli aşağıdakı kimi olacaq:

$$\begin{aligned} F(\alpha,\theta) = \big[& e^{\alpha_1\omega}(C_1 \cos\beta_1\omega + D_1 \sin\beta_1\omega) + \\ & + e^{-\alpha_2\omega}(C_2 \cos\beta_2\omega + D_2 \sin\beta_2\omega)\big] X(\alpha), \end{aligned} \qquad (14)$$

harada C və D – ixtiyari sabitlərdir.

Yerdəyişmə və qüvvə komponentlərinin qiymətini təyin etmək tələb olunarsa, onda F – tənliyinin qiymətini (2) tənliyində nəzərə almaq lazım gələcəkdir. θ-dan asılı olan F – tənliyinin törəməsi (2) tənliyi ilə əlaqədar olduğundan, (14) tənliyinin həlli dörd sadə tənliyin həllindən ibarət olacaqdır.

θ-dan asılı olan F-in birinci törəməsini təyin edək:

$$\begin{aligned} F'(\alpha,\theta) = \{& e^{-\alpha_1\omega}[(\alpha_1 C_1 - \beta_1 D_1)\cos\beta_1\omega + (\alpha_1 D_1 + \beta_1 C_1)\sin\alpha\omega] + \\ & + e^{-\alpha_2\omega}[(\alpha_2 C_2 + \beta_2 D_2)\cos\beta_2\omega + (\alpha_2 D_2 + \beta_2 C_2)\sin\beta_2\omega]\} X_n(\alpha) \end{aligned} \qquad (15)$$

(15) tənliyini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\begin{aligned} F'(\alpha,\theta) = \big[& e^{-\alpha_1\omega}(C_1' \cos\beta_1\omega + D_1' \sin\beta_1\omega) + \\ & + e^{-\alpha_2\omega}(C_2' \cos\beta_2\omega + D_2' \sin\beta_2\omega)\big] X(\alpha), \end{aligned} \qquad (16)$$

(16) tənliyində iştirak edən C', D', ... və sairəni C_1, D_1 ,...ilə əvəz edib və diferen-sialladıqdan sonra C_2^2, D_2^2,... və sairə ixtiyari əmsalların *n*-ci tərtibdən törəməsini θ-ya görə alırıq:

$$C_{1_2}^n = \alpha_{1_2} C_{1_2}^{n-1} - \beta_{1_2} D_{1_2}^{n-1} \ ; \ D_{1_2}^n = \alpha_{1_2} D_{1_2}^{n-1} - \beta_{1_2} C_{1_2}^{n-1} \qquad (17)$$

Yuxarıdakı əlaqələri (2) tənliyində nəzərə alsaq, örtükdə əmələ gələn qüvvə komponentlərinin qiymətlərini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{Eh}{R}\sum\left[e^{-\alpha_1\omega}\left(C_1^{(2)}\cos\beta_1\omega + D_1^{(2)}\sin\beta_1\omega\right)+\right.\\
&\left.+e^{-\alpha_2\omega}\left(C_2^{(2)}\cos\beta_2\omega + D_2^{(2)}\sin\beta_2\omega\right)\right]X_n^n,\\
s &= \frac{Eh}{R}\sum\left[e^{-\alpha_1\omega}\left(C_1^{(2)}\cos\beta_1\omega + D_1^{(1)}\sin\beta_1\omega\right)+\right.\\
&\left.+e^{-\alpha_2\omega}\left(C_2^{(1)}\cos\beta_2\omega + D_2^{(1)}\sin\beta_2\omega\right)\right]X_n^n,\\
N_2 &= -\frac{Eh}{R}\sum\left[e^{-\alpha_1\omega}\left(C_1\cos\beta_1\omega + D_1\sin\beta_1\omega\right)+\right.\\
&\left.+e^{-\alpha_2\omega}\left(C_2\cos\beta_2\omega + D_2^{(2)}\sin\beta_2\omega\right)\right]X_n^n + ke^{-\alpha_1\omega}\times\\
&\times\left\{\left[\left(C_1^{(6)}+C_1^{(4)}\right)\cos\beta_1\omega + \left(D_1^{(6)}+D_1^{(4)}\right)\sin\beta_1\omega\right]+\right.\\
&\left.+e^{-\alpha_2\omega}\left[\left(C_2^{(6)}+C_2^{(4)}\right)\cos\beta_2\omega + \left(D_2^{(6)}+D_2^{(4)}\right)\sin\beta_2\omega\right]\right\}X_n,\\
M_2 &= \frac{D}{R^2}\sum\left\{e^{-\alpha_1\omega}\left[\left(C_1^{(6)}+C_1^{(4)}\right)\cos\beta_1\omega + \left(D_2^{(6)}+D_2^{(4)}\right)\sin\beta_2\omega\right]\right\}X_n,\\
Q_2 &= \frac{D}{R^2}\sum\left\{e^{-\alpha_1\omega}\left[\left(C_1^{(7)}+C_1^{(5)}\right)\cos\beta_1\omega + \left(D_1^{(7)}+D_1^{(5)}\right)\sin\beta_1\omega\right]+\right.\\
&\left.+e^{-\alpha_2\omega}\left[\left(C_2^{(7)}+C_2^{(5)}\right)\cos\beta_2\omega + \left(D_2^{(7)}+D_2^{(5)}\right)\sin\beta_2\omega\right]\right\}X_n
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Yuxarıdakı qayda üzrə yerdəyişmələrin qiymətlərini hesablamaq olar. (18) tənliyində yerdəyişmələr iştirak etmədiyi üçün, onların qiymətini hesablamağa ehtiyac qalmır.

İndi ise xarakterik tənliyi hesablamaq lazimdır. Onu həll etmək üçün aşağıdakı kimi yazırıq:

$$
k_{\substack{1,2,3,4,\\5,6,7,8}} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pm i\lambda^2\sqrt{\frac{1}{k}}}} \tag{19}
$$

Beləliklə müəyyən etmək olur ki, kök altında $\frac{1}{4}$ və $\frac{1}{2}$ -in hesabatını apararkən görünür ki onların hesabatda heç bir rolu yoxdur: Misal uçün örtüyün həndəsi xarakterini yazaq: $\lambda = 0{,}45$, $k = 1{,}2\cdot 10^{-5}$, yəni $\lambda^2\sqrt{\frac{1}{k}}$ ifadəsi əsasən k-nın qiymətini təyin edir. k-nın təqribi qiyməti belədir:

$$
k_{\substack{1,2,3,4,\\5,6,7,8}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm im\zeta}}\ , \tag{20}
$$

harada $\xi^4 = \frac{R^2}{l^2}\sqrt{\frac{1}{R}}$.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 = \beta_2 &= \frac{1}{2}\xi\sqrt{m}\sqrt{2+\sqrt{2}},\\
\alpha_2 = \beta_1 &= \frac{1}{2}\xi\sqrt{m}\sqrt{2-\sqrt{2}},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

(21) ifadəsini (18) tənliyində yerinə yazsaq, onda tənliyi həll etmiş olarıq: ixtiyari sabitin qiymətləri isə sərhəd şərtindən tapılır.

NƏTİCƏ

1. Bu məqalədə məqsəd momentsiz nəzəriyyə üsulu ilə örtüyün hesabatını aparmaqdır.
2. Məsələni dəqiq həll etmək üçün konstruksiyanın funksiyası dəqiq seçilmişdir.
3. Örtüyün fundamental funksiyası olan $X(\alpha)$ funksiyası iki funksiya yəni $F(\alpha,\theta)$ vasitəsi ilə sərhəd şərtləri əsasında seçilmişdir.
4. Yerdəyişmələrin və qüvvə komponentlərinin qiymətləri (2) tənliyi vasitəsi ilə tapılır.

Ədəbiyyat

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. «Высшая школа», 1968, 307 с.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, 1949, 302 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. Гостехиздат, 1958, 178 с.
4. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947, 225 с.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962, 217 с.

МУСАЕВ Х.И., ГУСЕЙНОВ Ф.С.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Резюме

Введение статических и геометрических гипотез, как показано в работе В.В.Новожилова равносильно утверждению, что характер изменения всех деформаций и усилий вдоль образующей оболочки предполагается существенно более плавным, чем характер их изменения вдоль дуги окружности.

В.З.Власовым получено разрешающее уравнение и для цилиндрических оболочек с некруговым контуром. В.З.Власов предложил использовать в качестве функций распределения фундаментальные функции поперечных колебаний балки.

Разработка этого метода и применение к различным задачам математической физики было осуществлено Л,В.Канторовичем. При выборе нужной функции для оболочки следует исходить из естественной аналогии в граничных условиях обеих конструкций. Так, шарнирному опиранию оболочки по одному из краев соответствует шарнирная опора балки, а полному защемлению края оболочки соответствует жесткая заделка конца балки.

Для получения более точного решения приближенно задают выражение функции F не одной балочной функцией, а рядом по фундаментальным оболочным функциям $X(\alpha)$.

Ключевые слова: конструкции, оболочки, перемещения, напряжения, уравнения, граничные условия.

MUSAYEV Kh.I., HUSEYNOV F.S.

CONSTRUCTION OF GENERAL SOLUTION OF THE PROBLEM

Summary

The introduction of static and geometric hypotheses, as shown in the work of V.V. Novozhilov, is tantamount to the statement that the nature of changes in all deformations and forces along the generator of the shell is assumed to be substantially smoother than the character of their changes along a circular arc.

V.Z.Vlasov obtained a resolving equation for cylindrical shells with a non-circular contour. V.Z.Vlasov proposed to use the fundamental functions of the lateral oscillations of the beam as distribution functions.

The development of this method and application to various problems of mathematical physics was carried out by L.V.Kantorovich. When choosing the desired function for the shell, one should proceed from a natural analogy in the boundary conditions of both structures. Thus, the hinge support of the shell along one of the edges corresponds to the hinge support of the beam, and to the complete clamping of the edge of the shell there corresponds a rigid embedment of the end of the beam.

To obtain a more accurate solution, the expression of the function F is approximated not by a single beam function, but by a series of fundamental shell functions $X(\alpha)$.

Key words: constructions, shells, displacement, stresses, equations, boundary conditions.